

روابط بازگشتی و تکنیکهای حل آنها

مفهوم روابط بازگشتی

یک رابطه بازگشتی برای دنباله $\{a_n\} = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ رابطه ایست که a_n را برحسب جملات قبلی بیان می کند. مثلاً $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ یک رابطه بازگشتی مرتبه 2 است یعنی هر جمله آن به دو جمله ماقبل وابسته است. که برای حل آن نیاز به دو شرط اولیه است. مثلاً $a_0 = 0, a_1 = 1$

مثال :

الف) تعداد رشته های ده بیتی فاقد دو صفر متوالی را یابید ؟

حل:

روش اول : این رشته ها یا فاقد صفرند که تعدادشان 1 است، یا شامل یک 0 هستند که تعدادشان 10 است، یا شامل دو 0 هستند که تعدادشان $\binom{9}{2}$ است (8 تا 1 دارند که بین آنها 9 مکان است که 2 مکان آن باید انتخاب شود)، یا شامل سه 0 هستند که تعدادشان $\binom{8}{3}$ است یا شامل چهار 0 هستند که تعدادشان $\binom{7}{4}$ است و یا بالاخره شامل پنج 0 هستند که تعدادشان $\binom{6}{5}$ است پس :

$$\text{جواب} = \binom{11}{0} + \binom{10}{1} + \binom{9}{2} + \binom{8}{3} + \binom{7}{4} + \binom{6}{5} = 144$$

روش دوم : فرض کنید a_n تعداد رشته های n بیتی فاقد دو صفر متوالی است. اگر بازگشتی فکر کنید رشته ها دو نوع هستند یا به 1 ختم می شوند یا به 0. اگر به یک ختم گردند آنگاه $n-1$ بیت دیگر باید خاصیت مساله را داشته باشد که تعدادشان a_{n-1} است. اگر به 0 ختم شوند آنگاه ماقبل آخر باید 1 باشد پس $n-2$ بیت دیگر باید خاصیت مساله را داشته باشند پس $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ این رابطه نیاز به دو شرط اولیه هم دارد که $a_1 = 2$ (به طول یک 2 رشته وجود دارد 0 و 1) و $a_2 = 3$ (01 و 10 و 11)

ب) رابطه ای بازگشتی برای تعداد رشته های n بیتی فاقد دو صفر متوالی بیابید؟

حل : اگر رقم آخر غیر صفر باشد (9 حالت) آنگاه $n-1$ رقم دیگر باید خاصیت مساله را داشته باشند (a_{n-1}) اگر رقم آخر صفر باشد آنگاه رقم ماقبل آن باید غیر صفر باشد (9 حالت) و $n-2$ رقم دیگر (a_{n-2}) دارند. پس : $a_n = 9(a_{n-1} + a_{n-2})$

که در آن :

$$a_1 = 10 \quad (0, 1, 2, \dots, 9)$$

(به طول 2، صد رشته هست که 00 قبول نیست) $a_2 = 99$

ج) n جا برای پارک کردن سواری (یکسان) یا موتورسیکلت (یکسان) وجود دارد که سواری دوجا و موتورسیکلت یک جا نیاز دارد. اگر بخواهیم همه n جا استفاده شود رابطه ای بازگشتی بیابید؟

حل: دو حالت داریم: ابتدا موتور پارک کند که $n-1$ جای دیگر باقی می ماند با a_{n-1} حالت و ابتدا سواری پارک کند که $n-2$ جای دیگر (a_{n-2} حالت) باقی می ماند پس: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ و $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$

د) فرض کنید D_n تعداد عدم تطبیق n شی است یعنی تعداد حالاتی که n شی با شماره های $1, 2, \dots, n$ هیچ کدام در جای طبیعی خود نیستند نشان دهید $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

حل: فرض کنیم شماره 1 در جای 2 قرار دارد پس برای شماره 2 دو حالت وجود دارد یا در جای 1 قرار دارد یا در جای 1 قرار ندارد. اگر در جای 1 باشد آنگاه $n-2$ شی دیگر هیچکدام نباید در جای طبیعی خود باشند (D_{n-2}). اگر شی 2 در جای 1 نباشد در اینصورت فکر میکنیم که مکان طبیعی شی 2 در جای 1 است که شی 2 در آن جا قرار نگرفته است. بنابراین $n-1$ شی هیچ یک در جای طبیعی خود نیستند که می شود D_{n-1} یعنی تعداد حالاتی که شی 1 در مکان 2 قرار دارد برابر $D_{n-1} + D_{n-2}$ است و از آنجایی که شی 1, $n-1$ حالت دارد (مکان 2, مکان 3 و... و مکان n) پس:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

ه) در یک جزیره در ماه صفرم هیچ خرگوشی نیست. در ماه یکم یک جفت خرگوش رها می کنیم هر جفت خرگوش پس از سن دو ماهگی و به بعد در هر ماه یک جفت دیر تولید می کنند. در ماه n ام چند خرگوش هست؟ (فرض کنید هیچ خرگوشی نمیرد)

حل: $a_0 = 0$ و $a_1 = a_2 = 1$

فرض کنیم a_n تعداد جفت ها در ماه n ام باشد، a_{n-1} تعداد جفت ها در ماه $n-1$ ام است که a_{n-2} جفت آنها هر کدام در ماه n ام، یک جفت تولید می کنند پس: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

حل روابط بازگشتی

منظور از حل رابطه بازگشتی، یافتن فرمولی برای a_n برحسب n می باشد .

روش تکرار با جایگذاری :

برای یک دسته از روابط ساده مثل حالتی که a_n فقط به a_{n-1} بستگی داشته باشد می توان از روش جایگذاری , روابط بازگشتی را حل کرد .

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = na_{n-1} \end{cases} \quad \text{مثال:}$$

$$a_2 = 2a_1 = 2 \times 1 = 2, \quad a_3 = 3a_2 = 3 \times 2 = 6, \quad a_4 = 4 \times a_3 = 4 \times 6 = 24$$

همانطور که مشاهده می شود جمله عمومی a_n در واقع همان $n!$ است.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \end{cases} \quad \text{مثال:}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + (2 + 1) \\ &= 2^2 (2a_{n-3} + 1) + (2 + 1) = 2^3 a_{n-3} + (2^2 + 2 + 1) \\ &= 2^4 a_{n-4} + (2^3 + 2^2 + 2 + 1) = \dots \\ &= 2^{n-1} a_1 + (2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1) \\ &= 2^{n-1} + (2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1) \end{aligned}$$

مجموع n جمله تصاعد هندسی با جمله اول t_1 و ضریب تصاعد q برابر است با: $\frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$

$$a_n = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

مثال:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n \end{cases}$$

$$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + n - 1 + n = \dots = a_0 + 1 + 2 + \dots + n - 1 + n \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تعریف: رابطه زیر را یک رابطه بازگشتی همگن خطی از درجه k با ضرایب ثابت می نامیم :

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k}$$

که $C_1, C_2, \dots, C_k$ اعداد ثابت حقیقی بوده و $C_k \neq 0$ است. این رابطه نیاز به k شرط اولیه دارد. برای حل باید معادله مشخصه تشکیل دهیم که عبارتست از : $r^k - C_1 r^{k-1} - C_2 r^{k-2} - \dots - C_k = 0$

حل روابط بازگشتی همگن مرتبه دو با ضرایب ثابت

فرم کلی این روابط به صورت زیر است :

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} = 0$$

به دو شرط اولیه نیاز داریم و معادله مشخصه آنها نیز به صورت زیر است :

$$r^2 + C_1 r + C_2 = 0$$

با حل معادله درجه دوم فوق سه حالت ممکن است رخ دهد:

(الف) اگر دو جواب حقیقی مختلف r_1 و r_2 داشته باشد جواب رابطه بازگشتی به فرم کلی زیر خواهد بود:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

(ب) اگر یک ریشه حقیقی مضاعف r داشته باشد جواب رابطه بازگشتی به فرم کلی زیر خواهد بود:

$$a_n = \alpha_1 r^n + n \alpha_2 r^n$$

(ج) اگر دو جواب مختلط r_1 و r_2 داشته باشد باز هم جواب مثل حالت (الف) می باشد:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

در هر حالت ضرایب α_1 و α_2 از طریق دو شرط اولیه به دست می آیند.

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ را با مقادیر اولی $a_0 = 2$ و $a_1 = 7$ حل کنید.

$$\text{حل: } r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = -1 \Rightarrow a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

$$a_0 = 2 \Rightarrow 2 = \alpha_1 \times 1 + \alpha_2 \times 1$$

$$a_1 = 7 \Rightarrow 7 = \alpha_1 \times 2 + \alpha_2 \times (-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha_1 = 9 \Rightarrow \alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1 \Rightarrow a_n = 3 \times 2^n - (-1)^n$$

مثال: جواب $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ را با شرایط $a_0 = 1$ و $a_1 = 3$ بیابید.

حل: ریشه مضاعف $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r - 2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$

پس جواب کلی به صورت $a_n = \alpha_1 2^n + n\alpha_2 2^n$ است.

$$a_0 = \alpha_1 2^0 + 0 \times \alpha_2 \times 2^0 = 1, \quad a_1 = \alpha_1 2^1 + 1 \times \alpha_2 \times 2^1 = 3$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = 2^n + \frac{1}{2} n 2^n = 2^n + n 2^{n-1}$$

مثال: با توجه به آنکه می دانیم دنباله اعداد فیبوناچی از رابطه $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ به دست می آید فرمول صریح F_n را به دست آورید. ($F_0 = 0, F_1 = 1$)

$$r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{حل:}$$

$$F_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad F_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \alpha_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

تذکر: رابطه بازگشتی همگن مرتبه اول با ضریب ثابت را می توان حالت خاصی از موارد فوق ذکر کرد که: با شرط اولیه a_0 معلوم $a_n + C a_{n-1} = 0$

$$a_n = \alpha r^n = \alpha(-C)^n \quad \text{جواب: } r + C = 0 \Rightarrow r = -C \Rightarrow \text{معادله مشخصه}$$

مثال: رابطه $a_n = 7a_{n-1}$ را با شرط $(n \geq 1)$ و $a_2 = 98$ حل کنید.

$$a_n - 7a_{n-1} = 0 \Rightarrow r - 7 = 0 \Rightarrow r = 7 \Rightarrow a_n = (7)^n \alpha_0$$

$$a_2 = 7^2 \alpha \Rightarrow 98 = \alpha 7^2 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \text{جواب: } a_n = 2(7)^n$$

حل روابط بازگشتی ناهمگن مرتبه اول و دوم

فرم کلی این روابط به صورت زیر است :

$$a_n + Ca_{n-1} = f(n) ; n \geq 1$$

$$a_n + ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f(n) ; n \geq 2$$

که $f(n)$ یک تابع بر حسب n است.

یکی از روشهای حل استفاده از جواب عمومی (U_n) و جواب خصوصی (p_n) است. اگر (U_n) یک جواب عمومی قسمت همگن و (p_n) یک جواب خاص رابطه بازگشتی فوق باشند، آنگاه $U_n + p_n$ یک جواب عمومی رابطه بازگشتی ناهمگن فوق است. برای به دست آوردن قسمت (U_n) با قرار دادن $f(n)=0$ و تبدیل معادله به حالت همگن طبق قسمت قبلی عمل می کنیم . و برای به دست آوردن جواب خصوصی (p_n) ابتدا به کمک $f(n)$ باید آنرا حدس زد و سپس با جایگذاری در رابطه اصلی آن را محاسبه نمود.

قاعده 1: در حالت کلی اگر در رابطه بازگشتی ناهمگن $f(n) = kq^n$ باشد (k یک ثابت معلوم) و q یک ریشه معادله مشخصه نباشد آنگاه جواب خاص را به صورت $p_n = Cq^n$ فرض کرده و با جایگذاری آن در رابطه بازگشتی ناهمگن ، مقدار C را به دست می آوریم . ولی اگر در معادله ناهمگن q یک ریشه ساده معادله مشخصه باشد جواب خاص را به صورت Cnq^n در نظر می گیریم.

مثال : رابطه $a_n = 3a_{n-1} + 5 \times 7^n$ را برای $n \geq 1$ و با شرط اولیه $a_0 = \frac{39}{4}$ حل کنید.

حل:

$$a_n - 3a_{n-1} = 0 \Rightarrow r - 3 = 0 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow U_n = \alpha_1 3^n \quad \text{جواب عمومی}$$

با توجه به اینکه $f(n) = 5 \times 7^n$ ، جواب خصوصی را به صورت $p_n = C7^n$ حدس می زنیم :

$$C7^n = 3C7^{n-1} + 5 \times 7^n \Rightarrow 7C - 3C = 5 \times 7 \Rightarrow C = \frac{35}{4}$$

$$a_n = (\alpha_1 3^n) + \left(\frac{35}{4} 7^n\right)$$

$$a_0 = \frac{39}{4} \Rightarrow \frac{39}{4} = \alpha_1 3^0 + \frac{35}{4} 7^0 \Rightarrow \alpha_1 = 1 \Rightarrow a_n = 3^n + \frac{5}{4} 7^{n+1}$$

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ را حل کنید .

حل:

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 3 \Rightarrow$$

$$U_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n$$

با توجه به $f(n) = 7^n$, $p_n = C7^n$ را حدس می زنیم . با جایگذاری در رابطه اصلی داریم :

$$C7^n = 5C7^{n-1} - 6C7^{n-2} + 7^n \Rightarrow 49C = 35C - 6C + 49 \Rightarrow C = \frac{49}{20} \Rightarrow$$

$$p_n = \frac{49}{20} 7^n \Rightarrow a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n + \left(\frac{49}{20}\right) 7^n$$

مثال: رابطه $a_n = 3a_{n-1} + 5 \times 3^n$ را برای $n \geq 1$ و با شرط اولیه $a_0 = 2$ را حل کنید.

حل:

$$a_n - 3a_{n-1} = 0 \Rightarrow r - 3 = 0 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow U_n = \alpha 3^n$$

از آنجاکه $f(n) = 5 \times 3^n$ و $q=3$ یکی از ریشه های ساده معادله همگن فوق است پس: $p_n = Cn3^n$

$$Cn3^n - 3C(n-1)3^{n-1} = 5 \times 3^n \Rightarrow 3^n \text{ طرفین تقسیم بر } 3^n$$

$$Cn - C(n-1) = 5 \Rightarrow C = 5 \Rightarrow a_n = \alpha 3^n + 5n3^n$$

$$a_0 = \alpha 3^0 + 5 \times 0 \times 3^0 = 2 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$a_n = 2 \times 3^n + 5n3^n \Rightarrow a_n = (2 + 5n)3^n$$

قاعده 2: در حالت کلی اگر در رابطه بازگشتی ناهمگن $f(n) = kn^q$ باشد (k ثابت معلوم) و عدد 1 ریشه معادله مشخصه نباشد آنگاه شکل کلی جواب خاص به صورت زیر است :

$$p_n = C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + \dots + C_q n^q$$

ولی اگر 1 ریشه معادله مشخصه باشد، شکل کلی جواب خاص به شکل زیر است :

$$p_n = C_0 n + C_1 n^2 + \dots + C_q n^{q+1}$$

مثال: جواب عمومی و خصوصی معادله $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n^4$ را به دست آورید.

حل : برای قسمت همگن :

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2 \Rightarrow$$

$$U_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n$$

با توجه به اینکه عدد 1 یک جواب ساده معادله مشخصه هست شکل جواب خاص برابر است با:

$$p_n = C_0 n + C_1 n^2 + C_2 n^3 + C_3 n^4 + C_4 n^5$$

قاعده 3: اگر در رابطه بازگشتی ناهمگن $f(n)=k$ یعنی عدد ثابتی باشد در واقع حالت خاصی از قاعده 2 بوده و $p_n = C$ می باشد که با جایگذاری در رابطه بازگشتی ناهمگن مقدار C به دست می آید.

مثال: جواب $a_{n+1} = 2a_n + 1$ را که در آن $n \geq 0$ و $a_0 = 0$ است را حل کنید.

حل:

$$a_{n+1} - 2a_n = 0 \Rightarrow r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow U_n = \alpha 2^n$$

$$p_n = C \Rightarrow C = 2C + 1 \Rightarrow C = -1$$

$$a_n = U_n + p_n \Rightarrow a_n = \alpha 2^n - 1$$

$$a_0 = 0 \Rightarrow 0 = \alpha 2^0 - 1 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow a_n = 2^n - 1$$

قاعده 4: اگر $f(n)$ ترکیب خطی از قواعد 1 و 2 و 3 باشد جواب خاص نیز به فرم ترکیب خطی آنها خواهد بود.

مثال: جواب $a_n = a_{n-1} + 4^n + 2^n$ را به دست آورید.

حل:

$$a_n - a_{n-1} = 0 \Rightarrow r - 1 = 0 \Rightarrow U_n = \alpha (1)^n$$

$$f(n) = 4^n + 2^n \Rightarrow p_n = C_1 4^n + C_2 2^n$$

با جایگذاری در معادله ناهمگن اصلی :

$$C_1 4^n + C_2 2^n \equiv C_1 4^{n-1} + C_2 2^{n-1} + 4^n + 2^n$$

$$C_1 4^n + C_2 2^n \equiv \left(\frac{C_1}{4} + 1\right) 4^n + \left(\frac{C_2}{2} + 1\right) 2^n$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{C_1}{4} + 1 \Rightarrow C_1 = \frac{4}{3}, C_2 = \frac{C_2}{2} + 1 \Rightarrow C_2 = 2$$

$$\Rightarrow a_n = \alpha(1)^n + \frac{4}{3}(4)^n + 2(2)^n$$

مثال: جواب عمومی و خصوصی معادله $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3^n + n^2 - 4n$ را به دست آورید.

حل: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2 \Rightarrow U_n = \alpha_1(1)^n + \alpha_2(2)^n$

$$f(n) = (3^n) + (n^2 - 4n) \Rightarrow p_n = \beta(3)^n + C_0n + C_1n^2 + C_3n^3$$

با توجه به اینکه عدد 1 جواب معادله همگن است برای $n^2 - 4n$ باید تا توان 3 جلو برویم.

حل روابط بازگشتی با تغییر متغیر

برخی از روابط بازگشتی را می توان با تغییر متغیر به روابط قابل حل تبدیل کرد.

مثال: رابطه بازگشتی $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$ را با شرایط اولیه $a_0 = a_1 = 1$ حل کنید.

حل: قرار می دهیم $b_n = \sqrt{a_n}$ پس $b_0 = b_1 = 1$ در نتیجه :

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} \Rightarrow r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 2$$

$$\Rightarrow b_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(2)^n$$

با اعمال شرایط اولیه داریم :

$$\begin{cases} b_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ b_1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow b_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(2)^n$$

با توجه به اینکه $b_n = \sqrt{a_n}$ پس $a_n = b_n^2$ در نتیجه :

$$a_n = \left[\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(2)^n \right]^2$$

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = \sqrt{\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}}$ با شرایط اولیه $a_0 = 8$ و $a_1 = 2\sqrt{2}$

حل: از طرفین لگاریتم می گیریم و تعریف می کنیم $b_n = \log_2 a_n$

$$\log a_n = \frac{1}{2}(\log a_{n-2} - \log a_{n-1}) \Rightarrow b_n = \frac{1}{2}(b_{n-2} - b_{n-1})$$

$$b_0 = \log a_0 = 3, \quad b_1 = \log a_1 = \frac{2}{3}$$

پس از حل و محاسبه b_n می توان a_n را به دست آورد زیرا $a_n = 2^{b_n}$.

$$a_0 = 1, a_1 = 2; \quad a_n = -2na_{n-1} + 3n(n-1)a_{n-2} \quad \text{مثال:}$$

حل:

$$b_n = \frac{a_n}{n!} \Rightarrow a_n = n! b_n, a_{n-1} = (n-1)! b_{n-1}, a_{n-2} = (n-2)! b_{n-2}$$

$$n! b_n = -2n(n-1)! b_{n-1} + 3n(n-1)(n-2)! b_{n-2}$$

$$\Rightarrow b_n = -2b_{n-1} + 3b_{n-2} \Rightarrow r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow b_n = \alpha_1(1)^n + \alpha_2(-3)^n$$

با توجه به شرایط اولیه $b_0 = 1$ و $b_1 = 2$, b_n برابر است با:

$$b_n = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(-3)^n \Rightarrow a_n = n! \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}(-3)^n \right)$$